

Geometría I

Examen XVI

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría I

Examen XVI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2026

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2020-21.

Grado Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Parcial 2.

Fecha 14 de enero de 2021.

Ejercicio 1. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Definimos

$$\begin{aligned}\bar{f} : V/\ker(f) &\longrightarrow \operatorname{Im}(f) \\ v + \ker(f) &\longmapsto f(v)\end{aligned}$$

1. Demostrar que $\bar{f}$ es una aplicación (está bien definida).
2. Demostrar que $\bar{f}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Ejercicio 2. Sobre el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas reales de orden 2 se definen

$$\begin{aligned}\varphi \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= x + t \\ \psi \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= x + y + z + t.\end{aligned}$$

1. Ampliar $\{\varphi, \psi\}$ a una base del espacio dual.
2. Hallar la matriz de cambio de base entre la base dual de la usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y la base obtenida en el apartado anterior.

Ejercicio 1. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Definimos

$$\begin{aligned}\bar{f} : V/\ker(f) &\longrightarrow \operatorname{Im}(f) \\ v + \ker(f) &\longmapsto f(v)\end{aligned}$$

Observación. Notemos que se nos está pidiendo que demostremos el primer teorema de isomorfía para espacios vectoriales.

1. Demostrar que $\bar{f}$ es una aplicación (está bien definida).

Sean $x, y \in V$ y tal que $x + \ker(f) = y + \ker(f)$. Veamos que la aplicación no depende del representante elegido; es decir, que $\bar{f}(x + \ker(f)) = \bar{f}(y + \ker(f))$.

$$\begin{aligned}x + \ker(f) = y + \ker(f) &\iff x - y \in \ker(f) \iff f(x - y) = 0 \iff \\ &\iff f(x) - f(y) = 0 \iff f(x) = f(y) \iff \\ &\iff \bar{f}(x + \ker(f)) = \bar{f}(y + \ker(f))\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bar{f}$ es una aplicación.

2. Demostrar que $\bar{f}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

En primer lugar, hemos de ver que $\bar{f}$ es una aplicación lineal. Sean $v_1, v_2 \in V$ y $a, b \in K$, donde K es el cuerpo sobre el que están definidos los espacios vectoriales. Entonces,

$$\begin{aligned}\bar{f}(a(v_1 + \ker(f)) + b(v_2 + \ker(f))) &= \bar{f}((av_1 + bv_2) + \ker(f)) = f(av_1 + bv_2) = \\ &= af(v_1) + bf(v_2) = a\bar{f}(v_1 + \ker(f)) + b\bar{f}(v_2 + \ker(f))\end{aligned}$$

Ahora, veamos que $\bar{f}$ es un monomorfismo.

$$\begin{aligned}\ker(\bar{f}) &= \{v + \ker(f) \in V/\ker(f) \mid \bar{f}(v + \ker(f)) = 0\} = \\ &= \{v + \ker(f) \in V/\ker(f) \mid f(v) = 0\} = \\ &= \{v + \ker(f) \in V/\ker(f) \mid v \in \ker(f)\} = \\ &= \{v + \ker(f) \in V/\ker(f) \mid v + \ker(f) = 0 + \ker(f)\} = \\ &= \{0 + \ker(f)\} = \{0\}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bar{f}$ es un monomorfismo. Veamos ahora que $\bar{f}$ es un epimorfismo calculando para ello la dimensión de su imagen.

$$\begin{aligned}\dim(V/\ker(f)) &= \dim(\ker(\bar{f})) + \dim(\operatorname{Im}(\bar{f})) = \\ &= \dim(V) - \dim(\ker(f)) = \dim(\operatorname{Im}(f))\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dim(\operatorname{Im}(\bar{f})) = \dim(\operatorname{Im}(f))$. Además, $\operatorname{Im}(\bar{f}) \subseteq \operatorname{Im}(f)$, por lo que $\operatorname{Im}(\bar{f}) = \operatorname{Im}(f)$ y $\bar{f}$ es un epimorfismo. En consecuencia, $\bar{f}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Ejercicio 2. Sobre el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas reales de orden 2 se definen

$$\begin{aligned}\varphi \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= x + t \\ \psi \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= x + y + z + t.\end{aligned}$$

1. Ampliar $\{\varphi, \psi\}$ a una base del espacio dual.

Consideramos la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_0 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, donde:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea ahora la base dual de la base usual, $\mathcal{B}_0^* = \{\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22}\}$, donde:

$$\varphi_{ij} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{ij} \quad i, j \in \{1, 2\}$$

En ese sistema de coordenadas, tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv (1, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}_0^*} \\ \psi &\equiv (1, 1, 1, 1)_{\mathcal{B}_0^*}\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\{\varphi, \psi, \varphi_{21}, \varphi_{22}\}$ forman una base de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^*$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por lo tanto, $\mathcal{B}^* = \{\varphi, \psi, \varphi_{21}, \varphi_{22}\}$ es una base de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^*$.

2. Hallar la matriz de cambio de base entre la base dual de la usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y la base obtenida en el apartado anterior.

Tenemos que:

$$M_{\mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B}_0^*} = (M_{\mathcal{B}_0^* \leftarrow \mathcal{B}^*})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Para calcular la inversa, empleamos el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{F'_4 = F_4 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{F'_1 = F_1 - F_2 \\ F'_3 = F_3 - F_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M_{\mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B}_0^*} = (M_{\mathcal{B}_0^* \leftarrow \mathcal{B}^*})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$